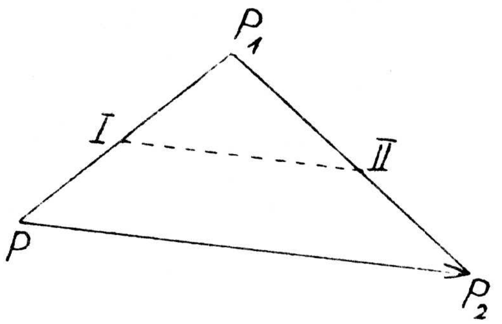
Vektorrechnung, Analytische Geometrie, Kegelschnitte

Leopold Peczar, Wien

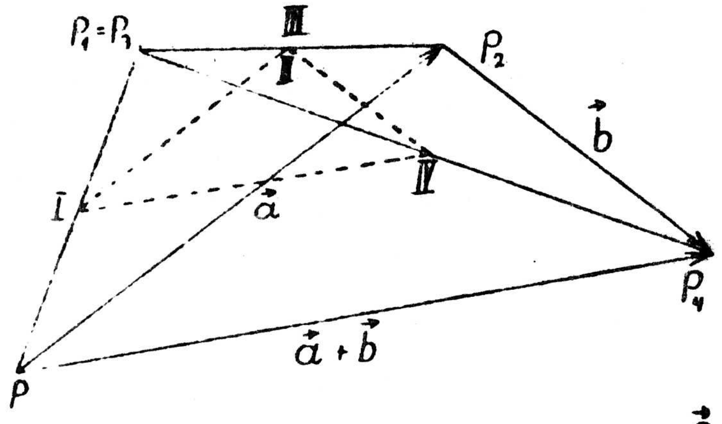
Führt man zwei Punktspiegelungen S_I und S_{II} mit den Zentren I und II nacheinander aus, so geht jeder Punkt P erst in $S_I(P) = P_1$ und weiter in $S_{II}(P_1) = P_2$ über. Dabei ist die Strecke PP_2 parallel zu I II und doppelt so lang wie diese. Man kann somit auch direkt von P nach P_2 gelangen, wenn man diese Strecke von P nach P_2 durchläuft. Diese, so mit einem Durchlaufsinn versehene Strecke wollen wir den P f e i l $\overrightarrow{PP_2}$, den Bahnpfeil von P nennen. Die Zusammensetzung der beiden Punktspiegelungen ergibt eine neue Abbildung, bei der die Punkte der Ebene (und analog im Anschauungsraum) parallele, gleichlange Strecken im gleichen Sinne durchlaufen. Eine solche Abbildung wird Translation oder S c h i e - b u n g genannt. Ihre Bahnpfeile bilden den S c h i e b u n g s - v e k t o r . Zu diesem Begriff kommt man auch, wenn man von allen Pfeilen der Ebene (des Raumes) ausgeht und in dieser Menge "zwei Pfeile in Relation nennt, wenn sie zueinander parallel sind, gleiche Länge und gleiche Orientierung haben". Diese Beziehung ist offensichtlich: reflexiv, symmetrisch und transitiv. Sie ist also eine Äquivalenzrelation und bewirkt so eine Einteilung der Menge aller Pfeile in (Äquivalenz-) Klassen und diese sind die V e k t o r e n . Jede der Äquivalenzklassen, jeder Vektor wird durch einen seiner Pfeile repräsentiert. Die Länge des Pfeiles wird der " B e t r a g des Vektors $\vec{a}$": $|\vec{a}|$ bezeichnet.



Sind $\vec{a},\vec{b}$ zwei Vektoren, so entsprechen ihnen die Translationen $T_{\vec{a}}$ und $T_{\vec{b}}$, die man jede als Verknüpfung zweier Punktspiegelungen S_I, S_{II} bzw. $S_{II} = S_{III}$, S_{IV} auffassen kann. $\underline{S_I(P) = P_1}$, $S_{II}(P_1) = P_2$,

$S_{III}(P_2) = S_{II}(P_2) = P_1 = P_3$,

$\underline{S_{IV}}\ (P_1) = S_{IV}(P_3) = \underline{P_4}$.



Von P gelangt man auch direkt nach P_4 mit Hilfe der Translation, die durch S_I und S_{IV} bestimmt ist. Ihren Vektor wollen wir die S u m m e der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

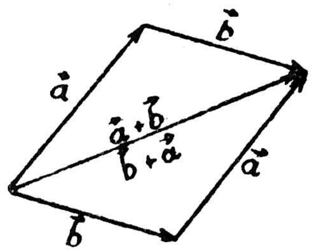
$$\vec{a} + \vec{b}$$

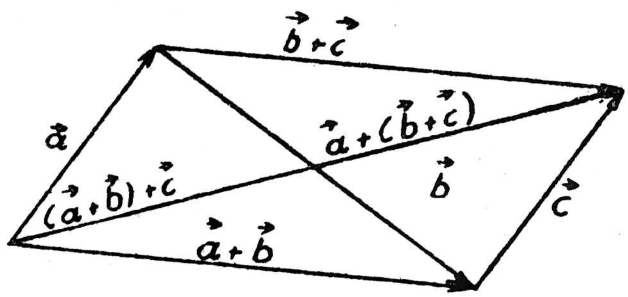
nennen. Die Verknüpfung der Translationen $T_{\vec{a}}$ und $T_{\vec{b}}$ ergibt $T_{\vec{a}+\vec{b}}$. Die Translationen und die Vektoren bilden zwei isomorphe Verknüpfungsgebilde, von denen man sofort erkennt, daß sie kommutative Gruppen sind.

1) Kommutatives Gesetz   2) Assoziatives Gesetz

der Addition:

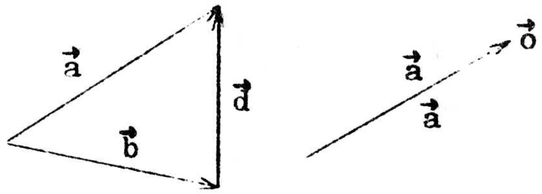
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \qquad\qquad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$



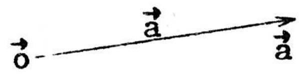


3) Inverse Operation zur Vektoraddition (Subtraktion):

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{d}, \quad \vec{d} = \vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{o} = \vec{a} - \vec{a}, \quad \vec{a} = \vec{a} + \vec{o}$$



Nullvektor, neutrales Element der Addition: $\vec{o} + \vec{a} = \vec{a}$

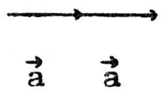


4) Inverses Element $\vec{a}^*$ zu $\vec{a}$, unterscheidet sich von diesem nur durch die Orientierung:

$\vec{o} - \vec{a} = \vec{a}^*$

Speziell ergeben sich:

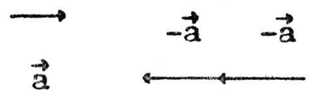
$\vec{a} + \vec{a} = 2.\vec{a}$



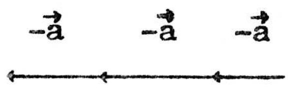
$\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = 3.\vec{a}$ ...

und

$-\vec{a} - \vec{a} = -2.\vec{a}$



$-\vec{a} - \vec{a} - \vec{a} = -3.\vec{a}$ ...



so daß man definieren kann:

$\lambda.\vec{a}$, $\lambda \in R$ (Körper der reellen Zahlen) ist ein zu $\vec{a}$ paralleler Vektor, dessen Betrag (Länge) das $|\lambda|$-fache des Betrages (der Länge) von $\vec{a}$ ist $|\lambda.\vec{a}| = |\lambda|.|\vec{a}|$ und der für $\lambda > 0$ die gleiche und für $\lambda < 0$ die entgegengesetzte Orientierung zu $\vec{a}$ hat.

Sind $\lambda, \mu, \nu, \ldots \in R$ und $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ Vektoren, so wird:

$$\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c} + \ldots$$

eine Linearkombination dieser Vektoren genannt. Sie ist wieder ein Vektor. Er ist speziell der Nullvektor $\vec{o}$: $\lambda.\vec{a} + \mu.\vec{b} + \nu.\vec{c} + \ldots = \vec{c}$, wenn alle Koeffizienten 0 sind. Ist das aber auch der Fall, wenn wenigstens ein Koeffizient von 0 verschieden ist

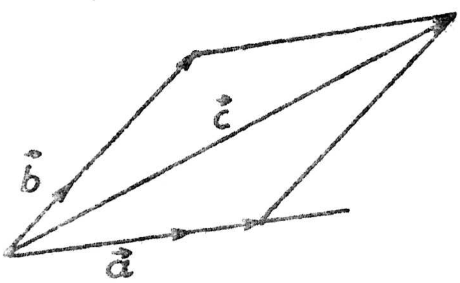
$$(\lambda, \mu, \nu, \ldots) \neq (0,0,0,\ldots),$$

so nennt man die Vektoren linear abhängig, im anderen Fall linear unabhängig.

Beispiele:

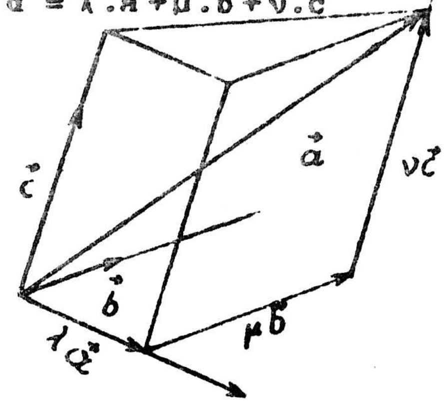
(1) $\lambda.\vec{a} + \mu.\vec{b} = \vec{o}$ $(\mu \neq 0)$, $\vec{b} = -\frac{\lambda}{\mu} \cdot \vec{a}$; die beiden Vektoren sind zueinander parallel. Sie sind kollinear.

(2) $\lambda.\vec{a} + \mu.\vec{b} + \nu.\vec{c} = \vec{o}$ $(\nu \neq 0)$, $\vec{c} = -\frac{\lambda}{\nu} \cdot \vec{a} + (-\frac{\mu}{\nu}).\vec{b}$. Die drei Vektoren sind komplanar. Drei und mehr Vektoren der Ebene sind immer linear abhängig. Höchstens zwei sind linear unabhängig.



(3) Sind drei Vektoren: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nicht komplanar, also linear unabhängig, so kann jeder weitere $\vec{d}$ als Linearkombination der ersteren dargestellt werden. Vier und mehr Vektoren des Anschauungsraumes sind stets linear abhängig. Höchstens drei sind dort linear unabhängig.

$\vec{d} = \lambda.\vec{a} + \mu.\vec{b} + \nu.\vec{c}$



<u>Vektoren in der Ebene</u>

Sind $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ Vektoren mit der Länge eins (Einsvektoren), die aufeinander normalstehen, so spricht man von einem orthonormierten Zweibein.

Seine Vektoren sind linear unabhängig und bilden mit jedem weiteren Vektor $\vec{a}$ der Ebene ein linear abhängiges Tripel: $\lambda.\vec{e_1}+\mu.\vec{e_2}+\nu.\vec{a}=\vec{o}$. Darin muß $\nu \neq 0$ sein, weil die beiden Einsvektoren linear unabhängig sind. Daraus folgt:

$$\vec{a} = \underbrace{-\frac{\lambda}{\nu}}_{a_1}.\vec{e_1} + \underbrace{\left(-\frac{\mu}{\nu}\right)}_{a_2}.\vec{e_2} = a_1.\vec{e_1} + a_2.\vec{e_2};\quad \vec{a}(a_1|\,a_2).$$

a_1, a_2 nennt man Kooridnaten und $a_1.\vec{e_1}$, $a_2.\vec{e_2}$ Komponenten von $\vec{a}$ und $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ eine (orthonormierte) Basis des Vektorraumes V_2 der Ebene.

Sind zwei Vektoren $\vec{a}\ (a_1, a_2)$, $\vec{b}\ (b_1, b_2)$ durch ihre Koordinaten bezüglich der orthonoermierten Basis $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ gegeben, so wird

$$\vec{a} = a_1.\vec{e_1} + a_2.\vec{e_2},\quad \vec{b} = b_1.\vec{e_1} + b_2.\vec{e_2}$$

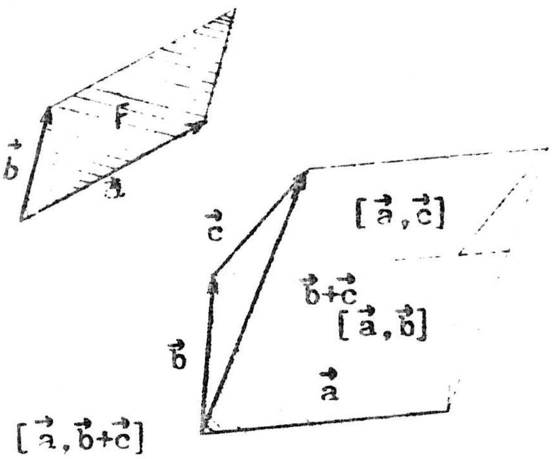
und daraus $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1).\vec{e_1} + (a_2 \pm b_2).\vec{e_2}$

$$\vec{a} \pm \vec{b}(a_1 \pm b_1|\,a_2 \pm b_2)$$

und

$$\lambda.\vec{a} = \lambda.(a_1.\vec{e_1} + a_2.\vec{e_2}) = \lambda.a_1.\vec{e_1} + \lambda.a_2.\vec{e_2},\quad (\lambda.a_1|\,\lambda.a_2).$$

<u>Produkte</u>. Zwie Vektoren $\vec{a}(a_1|\,a_2)$ und $\vec{b}(b_1|\,b_2)$ spannen unendlichviele, gleichgestellte, kongruente Parallelogramme auf.



Ihr Flächeninhalt F ist eine Funktion dieser Vektoren: $F=[\vec{a},\vec{b}]$. Aus dieser Definition ergeben sich folgende Eigenschaften:

(1) $[\vec{a},\vec{a}]=\emptyset$, (2) $[\vec{e_1},\vec{e_2}]=1$,

(3) $[\vec{a},\lambda.\vec{b}]=\lambda.[\vec{a},\vec{b}]$,

(4) $[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{a},\vec{c}]$

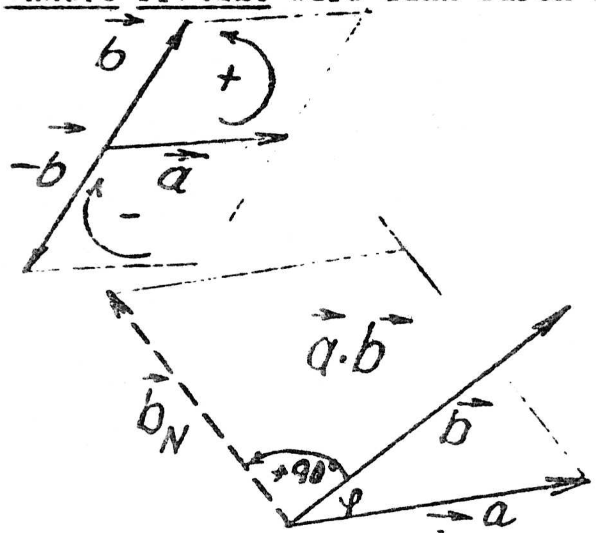
Distributives Gesetz.

Aus $\vec{o}=\vec{b}+(-\vec{b})$ folgt $[\vec{a},\vec{o}]=[\vec{a},\vec{b}]+[(-\vec{b})]=[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{a},-\vec{b}]$ und damit $[\vec{a},-\vec{b}]=-[\vec{a},\vec{b}]$. Es ist also $[\vec{b},\vec{a}]=-[\vec{a},\vec{b}]$. Es ergibt sich dann:

$[\vec{a},\vec{b}]=[a_1.\vec{e_1}+a_2.\vec{e_2},\ b_1.\vec{e_1}+b_2.\vec{e_2}]=(a_1b_2-a_2b_1)$. $[\vec{e_1},\vec{e_1}]=[\vec{e_2},\vec{e_2}]=$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a.b.\sin\varphi.[\vec{e_2},\vec{e_1}] = -[\vec{e_1},\vec{e_2}] = -1.$$

$[\vec{a},\vec{b}]$ wird das Äußere Produkt der beiden Vektoren genannt. Schwenkt man den Vektor $\vec{b}$ durch $+90°$ so bekommt man $\vec{b}_N$, $|\vec{b}_N| = |\vec{b}| = b$. Das Innere Produkt wird dann durch $\vec{a}.\vec{b} = [\vec{a},\vec{b}_N]$ definiert. Für diese gilt:



(1) $\vec{a}.\vec{a} = [\vec{a},\vec{a}_N] = a^2$, $e_1.e_1 = e_2.e_2 = 1$,

(2) Wenn $\vec{a} \perp \vec{b}$ ist, wird $b_N \| a$ und daher $\vec{a}.\vec{b} = [\vec{a},\vec{b}_N] = 0$, $e_1.e_2 = e_2.e_1 = 0$.

(3) Aus $(\vec{b}+\vec{c})_N = \vec{b}_N + \vec{c}_N$ folgt

$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = [\vec{a},(\vec{b}+\vec{c})_N] = [\vec{a},\vec{b}_N + \vec{c}_N] =$
$= [\vec{a},\vec{b}_N] + [\vec{a},\vec{c}_N] = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$.

Distributives Gesetz.

Es ergibt sich dann: $\vec{a}.\vec{b} = (a_1.\vec{e_1} + a_2.\vec{e_2}).(b_1.\vec{e_1} + b_2.\vec{e_2}) = a_1.b_1 + a_2.b_2 =$

$= \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_1 \end{vmatrix} = a.b.\sin(90° + \varphi) = a.b.\cos\varphi = [\vec{a},\vec{b}_N]$. Es wird somit $\vec{b}_N(-b_2|b_1)$ sein. Speziell ist dann: $\vec{a}.\vec{a} = a_1^2 + a_2^2 = a^2 = N(\vec{a})$, die Norm von $\vec{a}$ und $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}}$ der Betrag von $\vec{a}$.

Vektoren im Raum. Sind $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ Einsvektoren, die paarweise aufeinander normalstehen, so bilden diese ein orthonormiertes Dreibein. Seine Vektoren sind linear unabhängig und bilden mit jedem Vektor a des Raumes ein linear abhängiges Quadrupel:

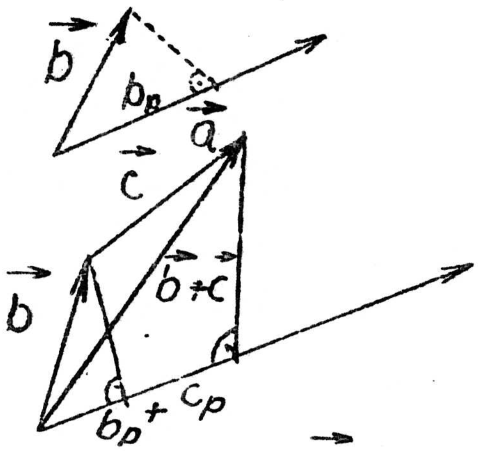
$$\lambda.\vec{a} + \mu.\vec{e_1} + \nu.\vec{e_2} + \rho.\vec{e_3} = \vec{o}.$$

Darin muß $\lambda \neq 0$ sein, weil die drei Einsvektoren linear unabhängig sind. Man kann daher:

$\vec{a} = -\frac{\mu}{\lambda}.\vec{e_1} + (-\frac{\nu}{\lambda}).\vec{e_2} + (-\frac{\rho}{\lambda}).\vec{e_3} = a_1.\vec{e_1} + a_2.\vec{e_2} + a_3.\vec{e_3}$ berechnen;

$\vec{a}(a_1|a_2|a_3)$. a_1, a_2, a_3 sind Koordinaten und $a_1.\vec{e_1}$, $a_2.\vec{e_2}$, $a_3.\vec{e_3}$ Komponenten von $\vec{a}$. Analog wie in der Ebene bekommt man dann aus:

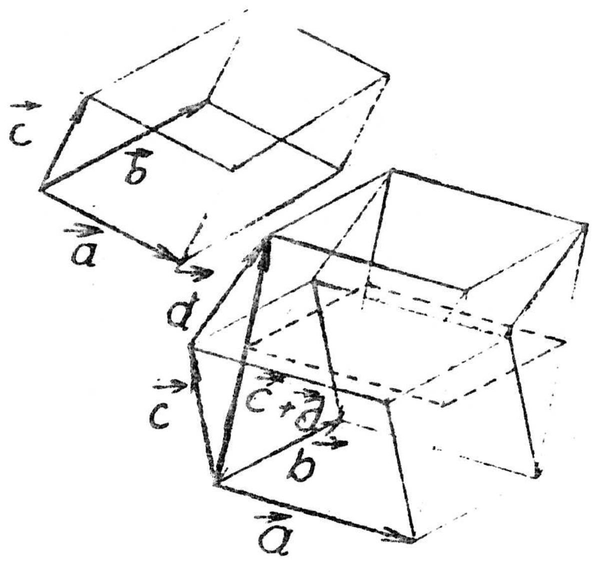
$\vec{a}(a_1|a_2|a_3)$, $\vec{b}(b_1|b_2|b_3)$ $\vec{a} \pm \vec{b}(a_1 \pm b_1|a_2 \pm b_2|a_3 \pm b_3)$ und



$\lambda.\vec{a}(\lambda.a_1|\lambda.a_2|\lambda.a_3)$.

Produkte. Das Skalare Produkt $\vec{a}.\vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die den Winkel φ einschließen, wird definiert durch $\vec{a}.\vec{b} = a.b_p$, wenn $0 < \varphi < 90°$ ist und $\vec{a}.\vec{b} = -a.b_p$, wenn $90° < \varphi < 180°$ gilt. Darin ist b_p die Länge der Normalprojektion von $\vec{a}$ auf die Richtung von $\vec{b}$. Für diese gilt offenbar: $(\vec{b}+\vec{c})_p = \vec{b_p} + \vec{c_p}$, woraus sofort das Distributive Gesetz: $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ folgt. Seine Anwendung ergibt $\vec{a}.\vec{b} = (a_1.\vec{e_1} + a_2.\vec{e_2} + a_3.\vec{e_3}).(b_1.\vec{e_1} + b_2.\vec{e_2} + b_3.\vec{e_3}) = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = a.b.\cos\varphi$, weil aus der Definition des Skalaren Produktes $\vec{e_i}.\vec{e_k} = 0$ für $i \neq k$ und $\vec{e_i}.\vec{e_k} = 1$ für $i = k$ folgen. Diese ergibt ja ganz allgemein $\vec{a}.\vec{b} = \emptyset$, wenn die Vektoren aufeinander normalstehen oder wenigstens einer der Vektoren der Nullvektor ist. Weiter ergibt: $\vec{a}.\vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = N(\vec{a})$, die Norm von $\vec{a}$ und $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}}$ den Betrag des Vektors. Ist speziell $|\vec{b}| = 1$, so stellt: $\vec{a}.\vec{b} = a.1.\cos\varphi$ die Länge der Normalprojektion des Vektors $\vec{a}$ auf die Richtung von $\vec{b}$ dar.

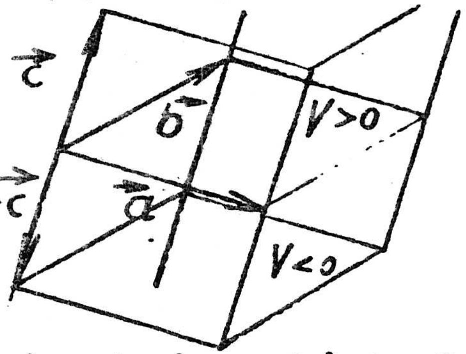
Drei Vektoren $\vec{a}(a_1|a_2|a_3)$, $\vec{b}(b_1|b_2|b_3)$, $\vec{c}(c_1|c_2|c_3)$ spannen unendlichviele, gleichgestellte, kongruente Parallelepipede auf. Ihr Volumen V ist eine Funktion dieser Vektoren:



$V = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$. $V = \emptyset$, wenn die Vektoren komplanar (linear abhängig) sind. $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}) = +1$ (Einheitswürfel). Multipliziert man einen Vektor mit dem Skalar λ, so wird auch V mit λ multipliziert. Das Distributive Gesetz: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}+\vec{d}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) + (\vec{a},\vec{b},\vec{d})$ wird durch Vergleich der entsprechenden Parallelepipedvolumen eingesehen.

Seine Anwendung bringt:

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}+(-\vec{c})) = (\vec{a},\vec{b},\vec{o}) = \emptyset = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})+(\vec{a},\vec{b},(-\vec{c}))$, woraus: $(\vec{a},\vec{b},(-\vec{c})) = -(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ folgt. Es wird somit $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3) = (\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_1) = (\vec{e}_3,\vec{e}_1,\vec{e}_2) = +1$



und $(\vec{e}_1,\vec{e}_3,\vec{e}_2) = (\vec{e}_3,\vec{e}_2,\vec{e}_1) = (\vec{e}_2,\vec{e}_1,\vec{e}_3) = -1$ sein. Alle diese Sachverhalte ergeben dann: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\Sigma\, a_i\vec{e}_i, \Sigma\, b_k\vec{e}_k, \Sigma\, c_l\vec{e}_l) = \Sigma\, a_i.b_k.c_l.(e_i,e_k,e_l) = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 =$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1.p_1 + a_2.p_2 + a_3.p_3 = \vec{a}.\vec{p}, \text{ wo } p_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},\ p_2 = \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix},$$

$p_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ sind. Der Vektor $\vec{p}(p_1|p_2|p_3)$ wird das <u>Vektorprodukt</u>:

$$\vec{p} = \vec{b}\times\vec{c} \quad (\vec{b} \text{ ex } \vec{c})$$

genannt. $(\vec{b},\vec{b},\vec{c}) = \vec{b}.\vec{p} = \emptyset$, $(\vec{c},\vec{b},\vec{c}) = \vec{c}.\vec{p} = \emptyset$ und $(p,b,c) = \vec{p}.\vec{p} = p^2 = p.b.c.\sin\varphi > \emptyset$; $p = b.c.\sin\varphi$. Der Vektor $\vec{b}\times\vec{c}$ steht auf $\vec{b}$ und $\vec{c}$ normal, seine Länge ist numerisch gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{b},\vec{c}$ aufgespannten Parallelogramms und ist so orientiert, daß $\vec{b},\vec{c},\vec{b}\times\vec{c}$ wie die Basisvektoren $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ aufeinander folgen. Es gilt:

$(\vec{b}\times\vec{c}).(\vec{b}\times\vec{c}) = b^2.c^2.\sin^2\varphi = b^2.c^2 - b^2.c^2.\cos^2\varphi = (\vec{b}.\vec{b}).(\vec{c}.\vec{c}) - (\vec{b}.\vec{c})^2$

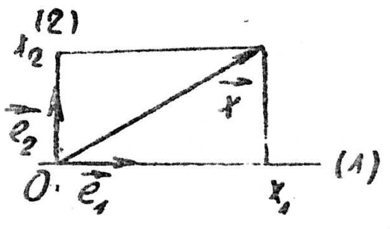
die Identität von Lagrange.

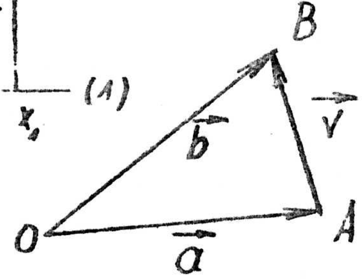
<u>Analytische</u> <u>Geometrie</u>. <u>Die</u> <u>Ebene</u>. Ist ein Vektor $\vec{x}(x_1|x_2)$ durch seine Koordinaten bezüglich der orthonormierten Basis $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ gegeben, so ist $\vec{x} = x_1.\vec{e}_1 + x_2.\vec{e}_2$. Nimmt man einen Punkt O als Ursprung oder Nullpunkt in der Ebene fest an, so gibt es einen Pfeil von $\vec{x}$, der von O ausgeht. Sein Endpunkt X ist dann auch durch $(x_1|x_2)$ gegeben. Dieses

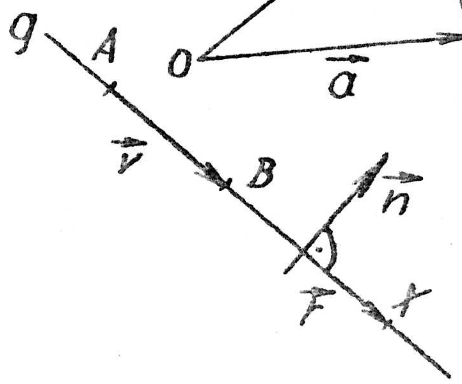
Zahlenpaar ist das cartesiche Koordinatenpaar von X. Der Pfeil $\vec{OX}$ von $\vec{x}$ ist der Ortspfeil von X. Sind nun zwei Punkte $A(a_1|a_2)$ und $B(b_1|b_2)$ gegeben, so werden durch ihre Ortspfeile die Vektoren $\vec{a}(a_1|a_2)$ und $\vec{b}(b_1|b_2)$ festgelegt. Der Pfeil AB bestimmt den Vektor $\vec{v}(v_1|v_2)$ und es muß $\vec{b}=\vec{a}+\vec{v}$, d.h. $\vec{v}=\vec{b}-\vec{a}(b_1-a_1|b_2-a_2)$ sein. $v_1=b_1-a_1$, $v_2=b_2-a_2$ (Koordinaten des Endpunktes minus Koordinaten des Anfangspunktes!). Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ ist dann

$$|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}.\vec{v}}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}.$$

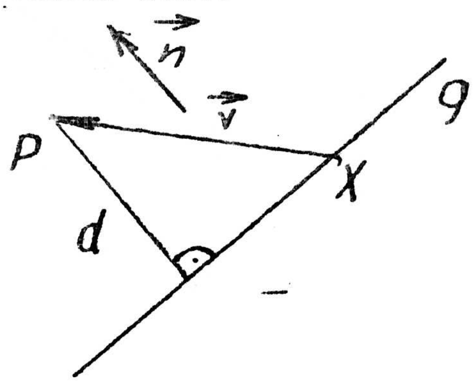
<u>Darstellung der Geraden</u>. Durch die Punkte $A(a_1|a_2)$, $B(b_1|b_2)$ wird die Gerade $g=(A,B)$ festgelegt. $X(x_1|x_2)$ sei ein beliebiger Punkt von g. Dann sind $\vec{v}(b_1-a_1\ b_2-a_2)$, $\vec{r}(x_1-a_1\ x_2-a_2)$ zwei Richtungsvektoren, für die $\vec{r}=t.\vec{v}$ gelten muß. Daraus folgt $x_1-a_1=t.(b_1-a_1)$, $x_2-a_2=t.(b_2-a_2)$ und schließlich $x_1=a_1+t.(b_1-a_1)$, $x_2=a_2+t.(b_2-a_2)$ eine <u>Parameterdarstellung der Geraden</u>. Der Vektor $\vec{n}(-(b_2-a_2)|b_1-a_1)$ ist ein Normalvektor der Geraden. Daher ist







$\vec{n}.\vec{r}=0$, $n_1(x_1-a_1)+n_2(x_2-a_2)=0$ und somit $n_1x_1+n_2x_2+c=0$, wo $c=-n_1a_1-n_2a_2$ bedeutet. Die <u>Gleichung der Geraden ist eine lineare Gleichung</u>. Die Koeffizienten n_1, n_2 der Variablen legen einen Normalenvektor fest.



$n_1x_1+n_2x_2+c=0$ ist die Gleichung einer Geraden g auf der der Punkt $X(x_1|x_2)$ liegt. Ist $P(p_1|p_2)$ ein weiterer Punkt, so legt der Pfeil $\vec{XP}$ $(p_1-x_1|p_2-x_2)$ einen Vektor $\vec{v}$ fest, dessen Normalprojektion auf die Richtung von $\vec{n}(n_1|n_2)$ der Normalabstand P von g ist. Dazu wir $\vec{n}$ normiert: $\frac{\vec{n}}{n}(\frac{n_1}{n}|\frac{n_2}{n})$, $n=\sqrt{n_1^2+n_2^2}$ und wir erhalten schon: $d=\frac{\vec{n}}{n}.\vec{v}$,

$$d=\frac{n_1p_1+n_2p_2+c}{n}.$$

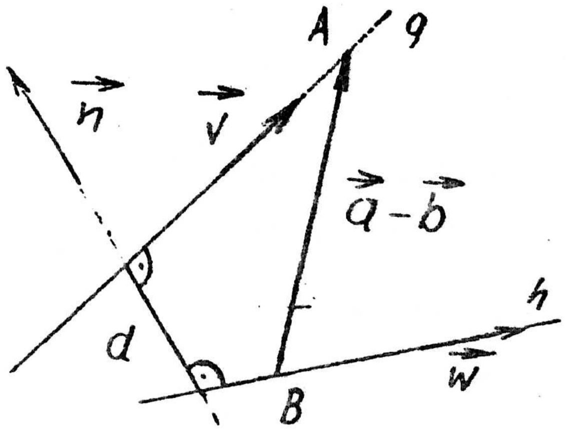
$\frac{n_1x_1+n_2x_2+c}{n}=0$ ist die Hesse'sche Normalform der Geradengleichung.

Der Winkel zweier Geraden $n_1x_1+n_2x_2+c=0$, $m_1x_1+m_2x_2+f=0$ kann mit Hilfe ihrer Normalenvektoren: $\vec{n}(n_1|n_2)$ und $\vec{m}(m_1|m_2)$ berechnet werden. Es ist ja $\vec{n}.\vec{m}=n.n.\cos\varphi$ und $[\vec{n},\vec{m}]=n.m.\sin\varphi$, woraus sich $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ergibt.

Sind $H_1=0$, $H_2=0$ die Hesse'schen Normalformen der Gleichungen der beiden Geraden, so sind $H_1=H_2$ und $H_1=-H_2$ die Gleichungen der beiden Winkelsymmetralen. Sie tragen ja alle Punkte, die von den beiden gegebenen Geraden den gleichen Abstand haben.

Der Anschauungsraum. Völlig analoge Überlegungen zu denen in der ebenen Geometrie führen zur Parameterdarstellung der Geraden: $\vec{x}=\vec{a}+t.\vec{v}$ und der Ebenengleichung: $n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3+c=0$. Darin sind $\vec{a}$ und $\vec{x}$ die durch die Ortspfeile von A und X (fester Punkt und beliebiger Punkt der Geraden) festgelegten Vektoren und $\vec{v}$ ein Richtungsvektor, bzw. $\vec{n}(n_1|n_2|n_3)$ ein Normalenvektor der Ebene. Durch seine Normierung, d.h. Division der Ebenengleichung durch $n=|\vec{n}|$, bekommt man auch hier die Hesse'sche Normalform der Ebenengleichung mit deren Hilfe man die verschiedenen Abstandsaufgaben lösen kann.

Sind $\vec{x}=\vec{a}+t.\vec{v}$ und $\vec{y}=\vec{b}+t.\vec{w}$ die Parameter-Darstellungen zweier Geraden g und h, so kann ihr Normalabstand in folgender Weise leicht gefunden werden:

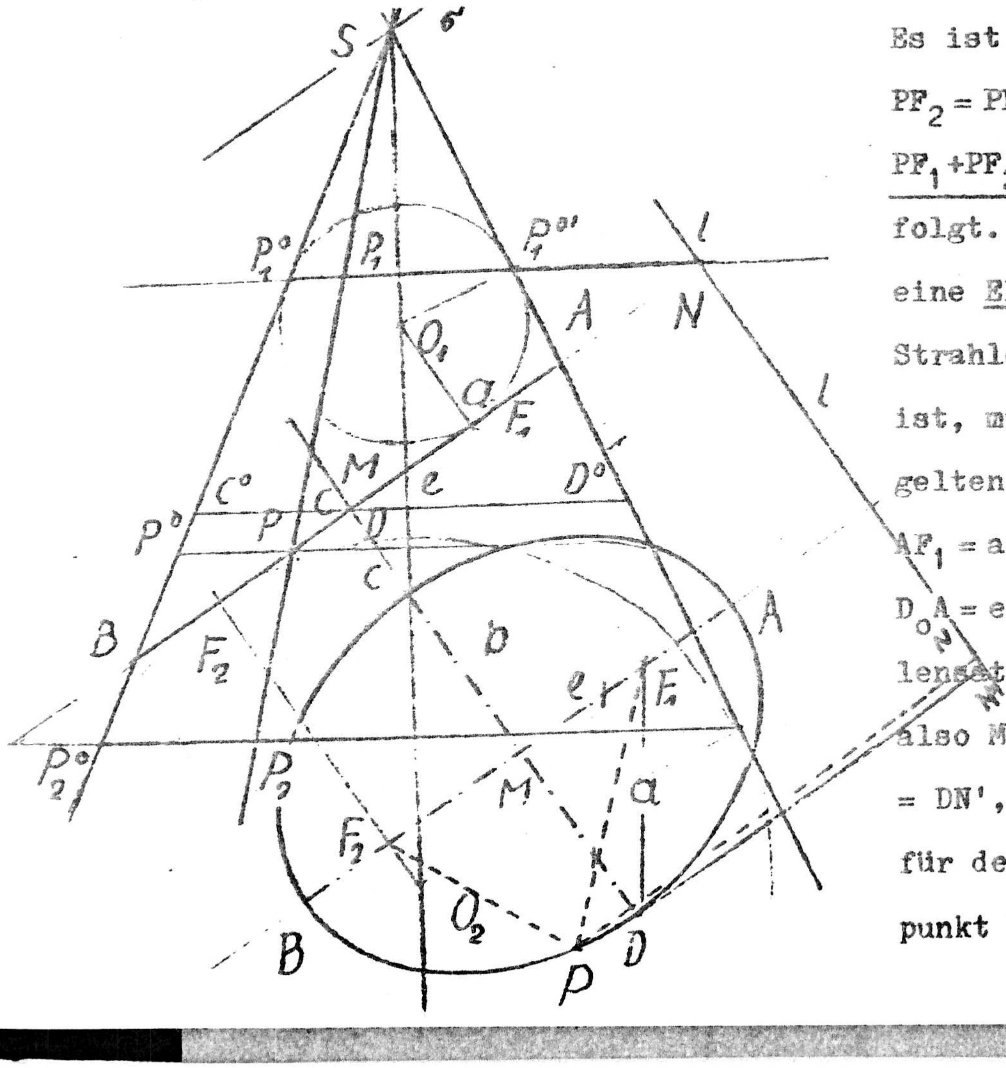


$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ ist ein Richtungsvektor ihres Gemeinlotes und $\frac{\vec{v}\times\vec{w}}{|\vec{v}\times\vec{w}|}$ ein gleichgerichteter Einsvektor. Der Normalabstand ist daher

$$d = \frac{\vec{v}\times\vec{w}}{|\vec{v}\times\vec{w}|} \cdot (\vec{a} - \vec{b}).$$

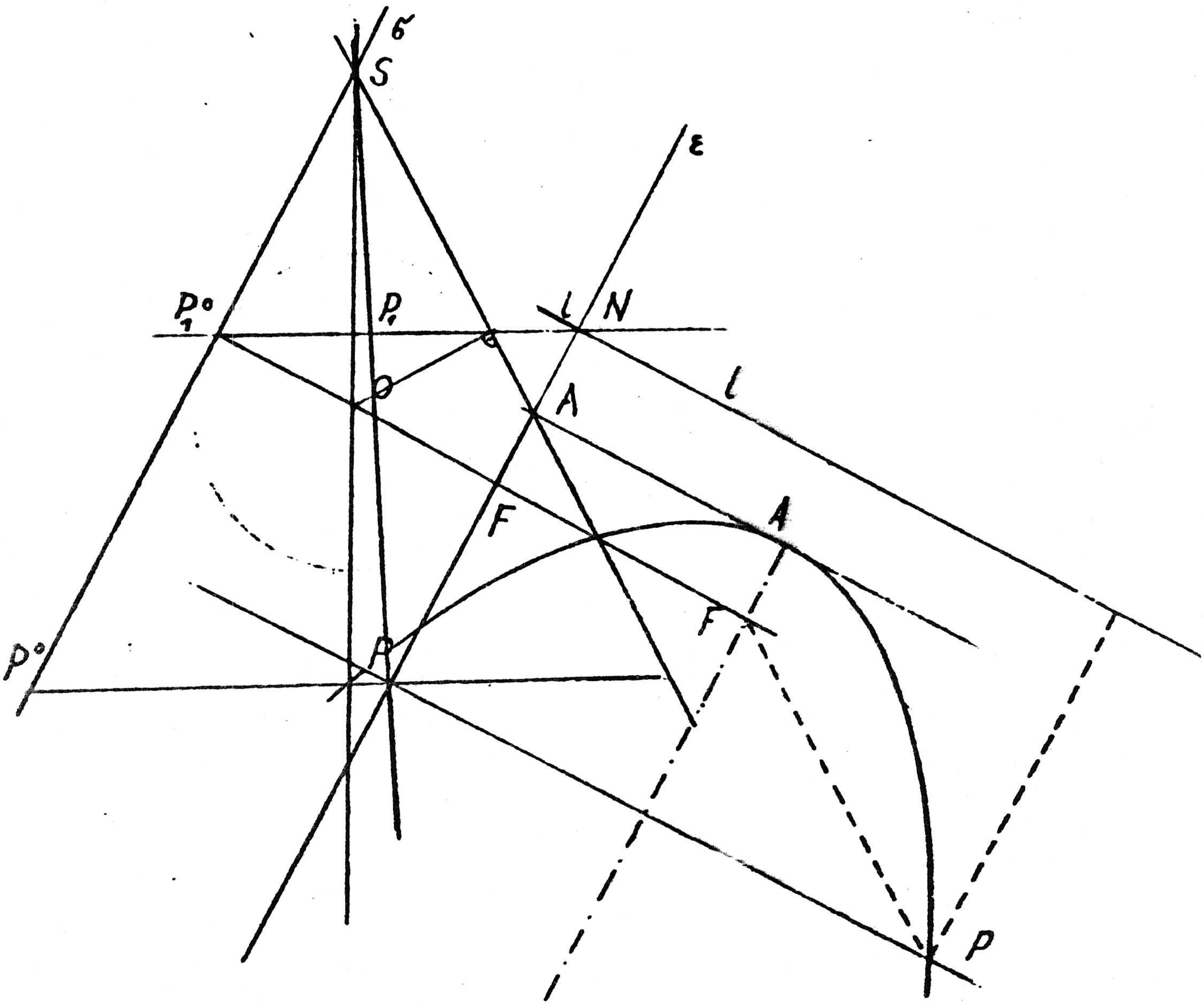
<u>Kegelschnittslinien</u>. Die ebenen Schnitte eines Drehkegels sind reguläre Kurven zweiter Ordnung, wenn die Ebene nicht durch die Kegelspitze geht. Im anderen Falle ergeben sich Geradenpaare, Erzeugendenpaare des Kegels. Diese können zwei verschiedene reelle Gerade, eine doppelt zählende reelle Gerade (wenn die Ebene den Kegel berührt) oder zwei imaginäre Gerade (wenn die Ebene den Kegel meidet), die sich in einem reellen Punkt, der Kegelspitze schneiden, sein.

<u>1. Fall</u>: Die Ebene ϵ geht nicht durch die Kegelspitze, aber die zu ihr parallele Scheitelebene σ meidet den Kegel.

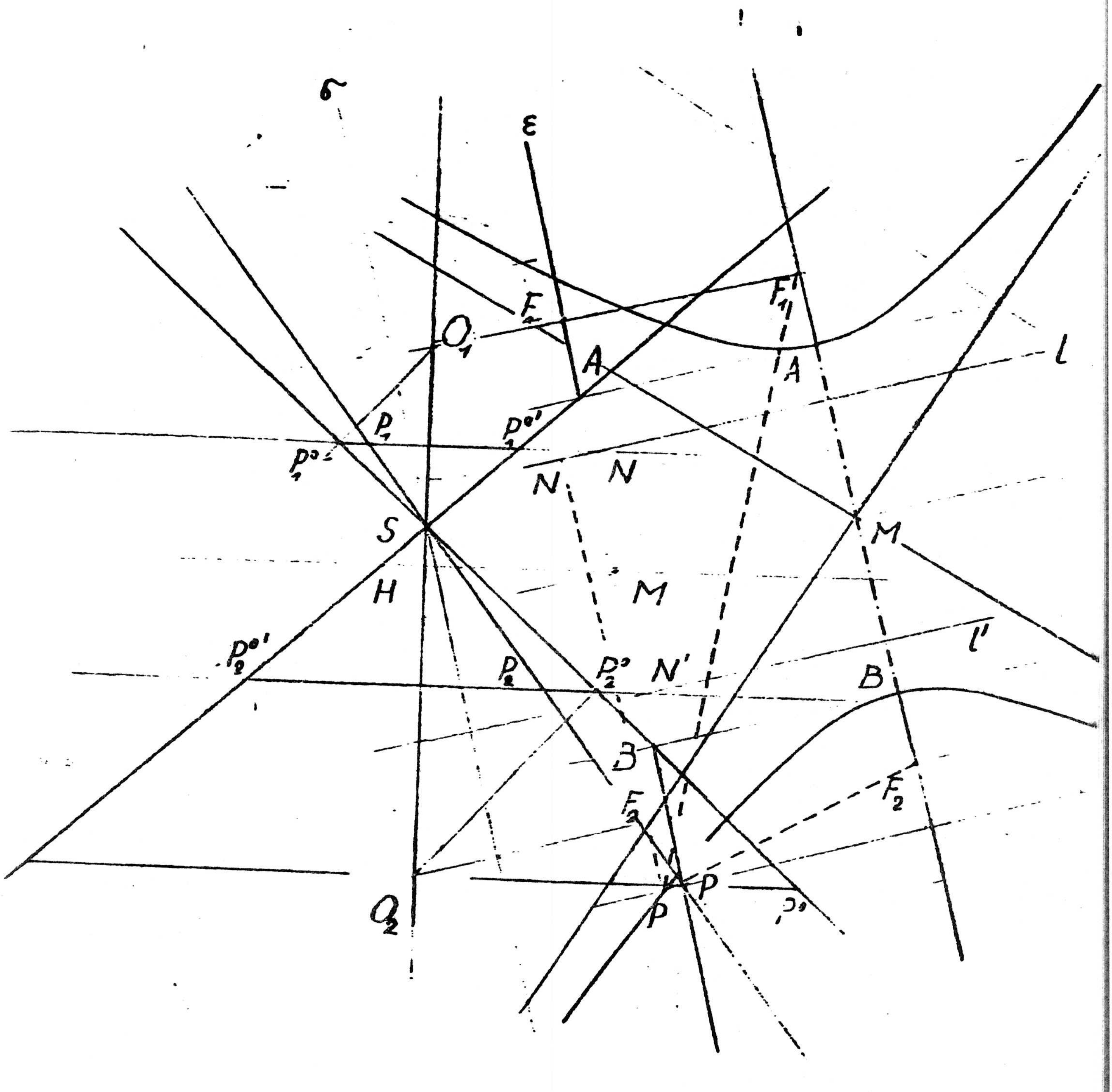


Es ist dann: $PF_1 = PP_1 = P^oP_1^o$, $PF_2 = PP_2 = P^oP_2^o$, woraus $\underline{PF_1 + PF_2 = P_1^oP_2^o} =$ konst. $= \underline{2.a}$ folgt. Die Schnittkurve ist eine <u>Ellipse</u>. Da nach dem Strahlensatz: $P^oP_1^o : PN =$ konst. ist, muß auch $PF_1 : PN =$ konst. gelten. Weil $D^oP_1^{o\prime} = a$ und $AF_1 = a - e = AP_1^{o\prime}$ ist, wird $D_oA = e$, was nach dem Strahlensatz: $MN : D^oP_1^{o\prime} = MA : AD^o$, also $MN : a = a : e$ und $MN = a^2/e = DN'$, $DF_1 : DN' = a : a^2/e = e : a$ für den speziellen Ellipsenpunkt D ergibt. Es muß dem-nach stets $PF_1 : PN = e/a < 1$ gelten.

2. Fall: ε geht nicht durch die Kegelspitze, aber die zu ihr parallele Scheitelbebene σ berührt den Kegel. Hier ist: $PF = PP_1 = P^oP_1^o = PN$. $PF : PN = 1$. Die Schnittkurve ist eine Parabel.



3. Fall: ε geht nicht durch die Kegelspitze, aber die zu ihr parallele Scheitelebene σ schneidet den Kegel nach zwei verschiedenen reellen Erzeugenden. Es ist dann: $PF_1 = PP_1 = P^oP_1^o$, $PF_2 = PP_2 = P^oP_2^o$ und somit: $PF_1 - PF_2 = P_1^oP_2^o = 2.a = AB$. Die Kurve ist eine Hyperbel.



Nach dem Strahlensatz ist $P^oP_1^o:PN = $ konst., also $PP_1:PN = $ konst. und $PF_1:PN = $ konst. Aus $P_1^oP_2^o = P_1^{o\prime}P_2^{o\prime} = 2.a = 2.HP_1^{o\prime}$ folgt $HP_1^{o\prime} = a$. Da $P_1^{o\prime}A = AF_1 = MF_1 - MA = e-a$ ist, wird: $HA = HP_1^{o\prime} + P_1^{o\prime}A = a + e - a = e$, so daß nach dem Strahlensatz: $MA:MN = HA:HP_1^{o\prime}$, $a:MN = e:a$ und schließlich $MN = a^2/e$ folgt. Für den Punkt A muß daher: $AF_1:Al = (e-a):(a-a^2/e) =$

$= (e-a).(e/a.(e-a)) = e/a$ gelten. Es ist somit für jeden Punkt P der Hyperbel: $PF_1 : PN = e/a > 1$.

Zusammengefaßt gilt somit, wenn F ein fester Punkt (Brennpunkt) und l eine feste Gerade (Leitgerade) sind: $PF : Pl = k = \text{konst.}$

Für $k = e/a < 1$ liegt eine Ellipse, für $k = 1$ eine Parabel und für $k = e/a > 1$ eine Hyperbel vor.

Hat l die Gleichung $n_1x_1 + n_2x_2 + c = 0$ mit der Hesse'schen Normalform $(n_1x_1 + n_2x_2 + c)/n = \emptyset$; $n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$ und $F(f_1|f_2)$, so wird:

$PF_1 = \sqrt{(x_1-f_1)^2 + (x_2-f_2)^2}$ und $Pl = PN = (n_1x_1 + n_2x_2 + c)/n$, was für den Kegelschnitt $PF_1 : Pl = \sqrt{(x_1-f_1)^2 + (x_2-f_2)^2} : (n_1x_1 + n_2x_2 + c)/n = k$ ergibt.

Daraus wird: $n.\sqrt{(x_1-f_1)^2 + (x_2-f_2)^2} = k.(n_1x_1 + n_2x_2 + c)$

$(-n^2+k^2n_1^2).x_1^2 + 2.k^2.n_1.n_2.x_1.x_2 + (k^2n_2^2-n^2).x_2^2 + 2.(n^2f_1+k^2n_1c).x_1 +$
$+ 2.(n^2f_2+k^2n_2c).x_2 + k^2c^2 - n^2f_1^2 - n^2f_2^2 = \emptyset$ eine Gleichung von der Form:

$A.x_1^2 + 2.B.x_1.x_2 + C.x_2^2 + 2.D.x_1 + 2.E.x_2 + F = \emptyset$; wo $A = k^2n_1^2-n^2$, $B = k^2n_1n_2$, $C = k^2n_2^2-n^2$, $D = n^2f_1 + k^2n_1c$, $E = n^2f_2 + k^2n_2c$, $F = k^2c^2-n^2f_1^2-n^2f_2^2$ sind.

Ist speziell: $F(e|0)$, $l \ldots x_1 = a^2/e$, d.h. $e.x_1 - a^2 = \emptyset$, $k = e/a$, so gilt: $f_1 = e_1$, $f_2 = \emptyset$; $n_1 = e$, $n_2 = \emptyset$; $n = e$, $c = -a^2$ und es wird daher:

$A = (e^2/a^2).e^2-e^2 = (e^2/a^2).(e^2-a^2)$, $B = \emptyset$. $C = -e^2$, $D = e^3+(e^2/a^2).e.(-a^2) =$
$= \emptyset$, $E = \emptyset$, $F = (e^2/a^2).a^4-e^4 = e^2.(a^2 - e^2)$, was:

$(e^2/a^2).(e^2-a^2).x_1^2 - e^2.x_2^2 = -e^2.(a^2-e^2) | (:e^2) | .a^2$ und dann weiter:

$(e^2-a^2).x_1^2 - a^2x_2^2 = a^2.(e^2-a^2)$ ergibt.

Für die <u>Ellipse</u> ist: $e < a$, $e^2 = a^2-b^2$

$$-b^2.x_1^2-a^2.x_2^2 = -a^2.b^2 | .(-1) | :a^2b^2$$

$$\underline{(x_1^2)/a^2 + (x_2^2)/b^2 = 1} \quad \underline{\text{Mittelpunktsgleichung}}.$$

Für die Hyperbel ist: $e > a$, $e^2 = a^2 + b^2$

$$b^2.x_1^2 - a^2.x_2^2 = a^2.b^2 \mid :a^2.b^2$$

$$\underline{x_1^2/a^2 - x_2^2/b^2 = 1} \quad \underline{\text{Mittelpunktsgleichung}}.$$

Nimmt man $\underline{k=1}$ $F(p/2|0)$, $1 \ldots x_1 = -p/2$, d.h. $2.x_1 + p = \emptyset$; so wird:

$f_1 = p/2$, $f_2 = \emptyset$, $n_1 = 2$, $n_2 = \emptyset$, $n = 2$, $c = p$, was:

$A = 4-4 = \emptyset$, $B = \emptyset$, $C = -4$, $D = 4.(p/2) + 2.p = 4.p$, $E = \emptyset$, $F = p^2 - 4.(p^2/4) = \emptyset$

und schließlich $\quad -4.x_2^2 + 8.p.x_1 = \emptyset : -4$

$$x_2^2 - 2.p.x_1 = \emptyset,$$

$$\underline{x_2^2 = 2.p.x_1}$$

die Scheitelgleichung der Parabel ergibt.

Hofrat Dr. Leopold Peczar
Schleifmühlgasse 1
1040 W i e n